Il metodo *deductio naturalis* nei sistemi della logica moderna

Andrzej Krzysztof Rogalski
Facoltà di Teologia, Lugano

Il problema della *deductio naturalis* (DN) ha una storia assai lunga[1]. Durante i secoli precedenti la deduzione naturale, vista come forma del metodo deduttivo, è stata applicata nei diversi sistemi sia filosofici che formali. Ci limitiamo, però, soltanto al campo della logica. Il problema sopraccitato si può guardare cronologicamente come fanno, ad esempio, diversi studi storico-filosofici. Noi, al contrario delle presentazioni del genere, prima analizziamo il ruolo della DN nei calcoli logici moderni, per risalire dopo alle origini della DN, cioè alla sillogistica di Aristotele.

---

[1] Per redigere questo contributo mi sono avvalso anche dei seguenti saggi: J. CORCORAN, *Aristotle's Natural Deduction System,* in AA.VV., *Ancient Logic and its Modern Interpretations,* Dordrecht-Boston 1974; S. GALVAN, *A Formalization of Elenctic Argumentation,* in "Erkenntnis" 43 (1995), 111-126; J. LUKASIEWICZ, *Aristotle's Logic from the Standpoint of Modern Formal Logic,* Oxford 1951; C. MANGIONE - S. BOZZI, *Storia della logica. Da Boole ai nostri tempi,* Milano 1995.

1. DN NEI SISTEMI FORMALI DI JASKOWSKI E DI GENTZEN

È ben noto il fatto che due logici: il polacco Stanislaw Jaskowski (1906-1965) ed il tedesco Gerhard Gentzen (1909-1945) hanno pubblicato nel 1934, indipendentemente, i risultati dei loro studi concernenti la DN. Le loro pubblicazioni hanno concluso le indagini che continuavano in questo campo ormai da parecchi anni. Già nel 1926 Jan Lukasiewicz (1878-1956) poneva il problema come descrivere, in modo formale, i diversi metodi praticati dai matematici. La teoria della dimostrazione *(Beweistheorie)* di David Hilbert (1862-1943), nonostante fosse teoreticamente soddisfacente, nella pratica deduttiva era inadeguata e artificiale. Il *Teorema di Deduzione* (TD), dimostrato nel 1930 da J. Herbrand (1908-1931), sviluppato nella assiomatica della *Teoria di Conseguenza* (TC) da Alfred Tarski (1901-1983), si può vedere come primo tentativo di costruire un *ponte* fra la theoria e la praxis.

Rispondendo al problema posto da Lukasiewicz, Jaskowski ha presentato i primi risultati dei suoi studi sulla DN durante il Primo Congresso dei Matematici Polacchi a Lvov (gli Atti del Congresso sono stati pubblicati a Cracovia nel 1929). La soluzione della questione si trova invece nell'articolo *On the Rules of Suppositions in Formal Logic.*[2] D'altronde bisogna notare che la DN-procedura era applicata già negli anni Venti dai diversi logici polacchi: Stanislaw Lesniewski (1886-1939), Jan Salamucha (1903-1944) e Tarski.

1.1. Il sistema formale di Jaskowski

Il sistema base di Jaskowski (contiene come costanti logiche soltanto i funtori dell'implicazione e negazione) consiste in quattro regole, corrispondenti:

(1) al *modus ponens*,
(2) alla dimostrazione condizionale,
(3) alla dimostrazione indiretta,
(4) alla regola per introdurre le sostituzioni.

Tutte le dimostrazioni nel sistema di Jaskowski sono lineari perciò doveva, in un modo grafico, dimostrare che certe parti della dimostrazione non sono più ottenibili. Secondo quel modo grafico ogni assunzione oppure una formula in dipendenza da essa (anche ogni parte della dimostrazione), aveva la sua "casella". Quelle dimostrazioni, tipo *caselle,* notevolmente modificate, sono state adoperate nei DN-sistemi di Fitch (1952), Copi (1954) oppure Kalish e Montague (1957).

Nella sua versione ufficiale del 1934, Jaskowski ha applicato dei prefissi numerici ad ogni formula. Ogni volta, facendo una nuova assunzione, aumenta il prefisso di un numero addizionale, invece ogni applicazione della dimostrazione condizionale oppure di quella indiretta diminuisce il prefisso con una sottrazione.

[2] Cfr. "Studia Logica" 1 (1934), 5-32.

Jaskowski trattava i prefissi come indicatori dei domini nei quali le formule prefissate erano valide; Le formule senza prefisso erano dei teoremi ordinari del suo sistema, quelle invece con prefisso erano teoremi relativizzati ad un dominio nel quale certe presupposizioni vengono postulate come valide. La stessa procedura praticano diversi logici, ad esempio, J. Slupecki e L. Borkowski (1958) nel loro DN-sistema.

Dopo il 1934 Jaskowski ha modificato il suo sistema (creando la versione generalizzata) per includere anche la *Logica Positiva* di Hilbert, la *Logica Intuizionistica* di A.N. Kolmogoroff (1903-1988) ed il *Calcolo Proposizionale con Quantificatori*. Per lo più, Jaskowski ha abbozzato un sistema per la Logica dei predicati del 1°-Ordine aggiungendo, però, tre regole nuove. Vale la pena di sottolineare il fatto che questo era il primo sistema della Logica Inclusiva che escludeva tutte le formule non valide nei domini vuoti. Oltre ciò Jaskowski ha stabilito una certa procedura standard per dimostrare la consistenza dei DN-sistemi.

L'idea essenziale, che è comune sia ai sistemi di Jaskowski che a quelli dei suoi seguaci, è semplicemente questa: dividere qualsiasi dimostrazione nelle ordinate e separate sub-dimostrazioni. Questo riguarda specialmente le logiche non-classiche, formalizzate come i DN-sistemi, ed è la soluzione più conosciuta che si possa trovare nei diversi manuali della logica che presentano delle *tecniche* della DN.

1.2. I sistemi di Gentzen

Gentzen ha pubblicato il suo famoso articolo *Untersuchungen über das logischen Schliessen,* in due parti, sulla rivista professionale "Mathematische Zeitschrift" (1934, 1935); i suoi primi risultati in merito sono stati presentati nello studio *Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystem* pubblicato in "Matematische Annalen" nel 1932. Nello studio sovracitato si vedono, però, certi influssi del lavoro di P. Hertz (del 1929) come, per esempio, *l'albero-notazione (tree-format)* per le dimostrazioni dei teoremi e l'applicazione delle famose sequenze.

Ci sono due sistemi di Gentzen abbastanza differenti: *Natürliche Kalkul - NK,* cioè il suo DN-sistema, e *Logische Kalkul - LK,* cioè il suo calcolo delle sequenze. Entrambi sono sia per la logica classica che per quella intuizionistica. Le sue regole per il NK essenzialmente sono le stesse che in Jaskowski. Esiste una sola differenza: Gentzen ha applicato l'albero-notazione per le dimostrazioni, perché voleva *liberare* il suo sistema dalle deduzioni non valide. Nella dimostrazione di questo tipo *(tree-format proof)* ogni premessa bisogna che sia sopra la conclusione, perciò non si può adoperare nessuna formula che non sia ora ammissibile. Le albero-dimostrazioni sono, senza nessun dubbio, molto utili nelle investigazioni teoretiche, perché *fanno vedere*, con massima chiarezza, la struttura della dimostrazione finita. Il lato negativo è, però, che non mostrano bene il processo della derivazione. Gentzen era consapevole di tutto ciò e diceva che le vere dimostrazioni sono solo di forma lineare. Non meraviglia perciò il fatto che le sue idee originarie siano state usate soprattutto negli studi teoretici, come quelli, ad esempio, di D. Prawitz (1965).

Il sistema LK, che voleva descrivere certe proprietà logiche, può essere considerato come un certo sviluppo della *deductio naturalis* e riguarda il cosiddetto Teorema di Taglio *(Cut-elimination Theorem;* Gentzen lo chiama *Hauptsatz).* Il carattere pratico di questo teorema viene spesso sopravvalutato cosicché molti logici vedono nel calcolo delle sequenze gentzeniane un tipo di sistema metalogico. Questo punto di vista non è corretto, perché:

1) non è conforme all'idea originale di Gentzen. In che senso dobbiamo dimostrare l'equivalenza del LK con qualsiasi sistema assiomatico se il LK è il sistema metalogico?

2) nel LK si può dimostrare solo tutto ciò che riguarda la sintassi del sistema (per es. i teoremi), non si dimostra invece nessuna delle questioni metateoretiche. Al contrario, la Teoria di Conseguenza di Tarski possiede una *forza espressiva* tanto più potente.

Nonostante le *mancanze* sovracitate, il LK è un sistema molto utile soprattutto nei calcoli logici nei quali il *Teorema di Taglio* è dimostrabile.

Bisogna ricordare che la regola *Taglio,* nonostante il suo valore essenziale, è l'unica nel sistema originale di Gentzen che non soddisfa la procedura tipica gentzeniana, cioè tutto ciò che della formula è presente nella premesse deve essere presente come sub-formula nella conclusione. Con la regola *Taglio* era possibile per Gentzen dimostrare l'equivalenza del suo sistema col sistema assiomatico. L'eliminazione invece della regola Taglio facilitava diversi risultati logici come, per esempio, la decibilità del calcolo delle proposizioni, semi-decibilità della logica dei predicati del 1°-Ordine e la dimostrazione della consistenza dell'aritmetica senza principio dell'induzione. Questa direzione delle ricerche è stata pienamente realizzata negli studi dei diversi logici: E. Beth (1959), J.J. Hintikka (1955) e R.M. Smullyan (1968), usufruendo in pieno la procedura tipica gentzeniana di dividere la formula iniziale nelle subformule e di invertire l'ordine delle regole. Bisogna sottolineare anche il fatto che il suo calcolo delle sequenze ha dato origine alla *Display Logic* di N.D. Belnap (1982), alla *Logica Lineare* di J.-Y. Girard (1987) e alla *Teoria dei Sequenti Generalizzati* di Dosen (1985).

Nel 1936 in "Mathematische Annalen" Gentzen ha pubblicato l'articolo *Die Wiederspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie* comprendente il sistema logico che era un tipo di "compromesso" fra i sistemi precedenti NK e LK. Il vantaggio di questo sistema era che bisognava solo fare le operazioni dell'addizione oppure dell'eliminazione delle formule negli antecedenti; nelle conclusioni, invece, bisognava definire le regole sia per introdurre che per eliminare le costanti logiche. Questo sistema ha influito molto lo sviluppo dei diversi DN-sistemi, perché si poteva adoperarlo nei calcoli logici di tipo lineare.

I n questo senso è stato più conosciuto del sistema di Jaskowski, almeno riguardo le logiche classiche. I sistemi DN di questo tipo si trovano, per esempio, in P. Suppes (1957) e H. Hermes (1962). Al contrario della procedura di Jaskowski, l'ordine delle assunzioni non è importante, come non c'è bisogno di dividere la dimostrazione[3] Bisogna dire che una procedura molto simile alla sopraccitata è stata introdotta da A.R. Anderson e J.D. Belnap al loro DN-sistema per le logiche rilevanti.

2. CONCLUSIONE

Paragonando i sovrapresentati DN-sistemi di Jaskowski e di Gentzen, si può dire che l'approccio alla DN di tutti e due era diverso. Jaskowski sembra di esser stato più concentrato sugli aspetti pratici del metodo della *deductio naturalis,* e che tanto il suo approccio generale come le soluzioni tecniche sono molto seguite dai logici. Gentzen, al contrario, era più teoretico: le sue investigazioni in questo campo l'hanno portato a risultati molto profondi nella teoria generale della dimostrazione; il suo sistema DN sembra invece essere soltanto co-prodotto dell'articolo del 1936.

La logica moderna, parlando dei diversi sistemi della *deductio naturalis,* vuole vedere le radici di essa in Aristotele, cioè nella sua sillogistica. Sia Jaskowski che Gentzen non hanno fatto nessun riferimento ad Aristotele. Nonostante le diverse assiomatizzazioni della sillogistica (la prima di Lukasiewicz del 1928) che viene presentata come un sistema formale assiomatico, ci sono stati parecchi tentativi di ricostruire il pensiero originario di Aristotele senza ricorrere alla enumerazione degli assiomi. Infatti nell'*Organon* si nota facilmente la grande *cultura* logica di Aristotele; la sua argomentazione, però, non è obbligatoriamente fatta in un modo assiomatico nel senso della logica moderna.

Perciò certi logici, per es. J. Corcoran (1974), opponendosi al tentativo di Lukasiewicz, hanno dimostrato che si può formalizzare il pensiero aristotelico costruendo un DN-sistema, in tal modo il pensiero originario dello Stagirita non viene ricostruito in maniera di un sistema assiomatico, sebbene abbia le regole logiche precisamente definite. Bisogna notare infine un fatto che le analisi logiche tipo DN vengono applicate alle diverse questioni filosofiche (vedere il tentativo di formalizzazione dell'*elenchos* presentato da S. Galvan). Dal punto di vista logico-filosofico, queste applicazioni sono molto interessanti e si presentano molto spesso come estensioni (tramite il metodo *deductio naturalis)* di un certo sistema base logico *(minimal logic).*

---

[3] Si veda la procedura adoperata da R. Feys e J. Ladrière nella loro traduzione delle opere di Gentzen del 1955.